

УДК 621.165

**В.П. СУББОТОВИЧ**, канд. техн. наук; проф. НТУ «ХПИ»**ПОТОК ЧЕРЕЗ ВРАЩАЮЩУЮСЯ РЕШЕТКУ ОСЕВОЙ  
ТУРБОМАШИНЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ  $S_1$** 

Рассмотрено относительное установившееся течение идеального газа через рабочую решетку осевой турбомшины. Поток разделен на слои произвольными поверхностями  $S_1$ . Трехмерное течение сведено к двумерному без допущения о том, что радиальная компонента скорости и все производные в радиальном направлении сохраняют свои значения, найденные из осесимметричного решения на поверхности  $S_2$ .

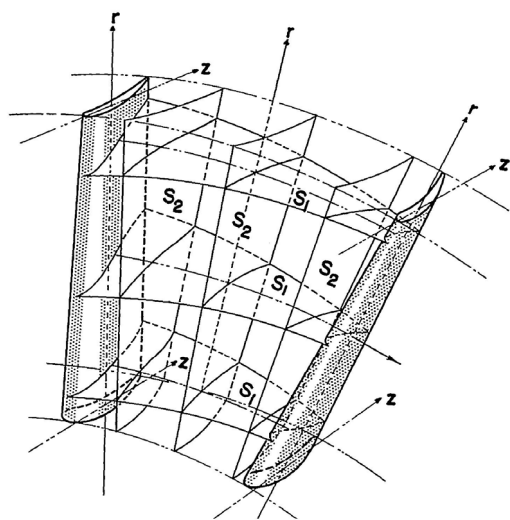
**Ключевые слова:** проточная часть турбомшины, квазитрехмерное течение, рабочая решетка, уравнение неразрывности, уравнение количества движения.

**Введение**

Эффективность проточных частей турбомашин в значительной степени определяется совершенством лопаток направляющих решеток и рабочих колес. Поэтому проблема создания высокоэкономичных и надежно работающих лопаточных аппаратов была и остается актуальной и находится в центре внимания специалистов, которые занимаются исследованиями и проектированием турбомашин. При достаточно высоком КПД, достигнутом к настоящему времени, повышать эффективность проточных частей можно только при использовании в задачах проектирования новых методов расчета течения, которые позволят находить нетрадиционные решения.

**Постановка проблемы и ее современное состояние**

Решение уравнений для трехмерного (3D) течения в решетке турбомшины является весьма трудоемкой задачей.

Рис. 1 – Поверхности  $S_1$  и  $S_2$ 

Для получения приближенного решения используется так называемый квазитрехмерный (Q3D) подход: сначала ищется осесимметричное решение в предположении, что это решение дает удовлетворительные данные по осредненным параметрам потока через решетку, а потом определяют параметры потока в межлопаточном канале как отклонения от средних параметров. Q3D течение в решетках турбин впервые было всесторонне исследовано Ч.Х. Ву, а его работа [1] стала классической. Полагается, что поток движется в слоях переменной толщины по двум поверхностям  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 1). Задача решается для каждой поверхности отдельно с учетом взаимного влияния двухмерных потоков. В постановке Ч.Х. Ву в задачах на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  для описания течений

используются уравнения Эйлера. Расчеты таких течений выполняются методом кривизны линий тока или методами, использующими решения дифференциальных уравнений в частных производных [2].

В задачах на поверхностях  $S_1$ , для которых полагается, что поверхности имеют ось симметрии, совпадающую с осью турбомашин, 3D-течение может быть сведено к 2D-течению, если течение в слое отнести к поверхности тока, лежащей посередине слоя. И нет необходимости делать допущения о том, что радиальная составляющая скорости и все производные в радиальном направлении являются однородными и сохраняют свои значения, соответствующие осесимметричному решению [3–5].

Сравнения расчетов невязкого 3D-течения и Q3D-течения [6, 7] показало, что отличия в получаемых результатах незначительны, а в ряде случаев наблюдалось лучшее качественное и количественное совпадение результатов экспериментов и расчетов, полученных при решении Q3D-задачи, чем при решении 3D-задачи.

### Предмет исследования, основные определения и обозначения

Предмет исследования – относительное установившееся течение идеального газа в межлопаточном канале вращающейся решетки осевой турбомашин. Используется цилиндрическая система координат  $(r, z, \theta)$ , ось  $z$  совпадает с осью турбомашин.

Поверхности  $S_1$  – произвольно скрученные поверхности, не имеющие осевой симметрии. Выбраны слой, ограниченный соседними поверхностями  $S_1^{(i)}$  и  $S_1^{(i+1)}$ , и поверхность тока  $S_{1mid}$ , которая лежит посередине между указанными поверхностями. Течение в слое будем относить к срединной поверхности тока  $S_{1mid}$  (рис. 2).

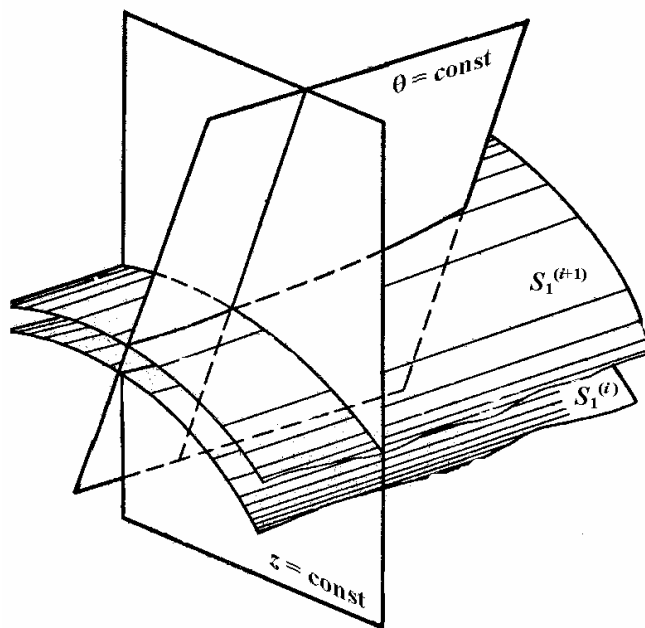


Рис. 2 – Слой переменной толщины

Выберем произвольную точку на поверхности  $S_{1mid}$ . Проведем плоскость, касательную к поверхности  $S_{1mid}$  в этой точке (назовем плоскость  $K$ ) и плоскости  $\theta = \text{const}$  и  $z = \text{const}$ , проходящие через эту точку. Линии  $l_1$  и  $m_1$  – линии пересечения поверхности  $S_{1mid}$  с плоскостями  $\theta = \text{const}$  и  $z = \text{const}$ , соответственно.

Скорость потока в относительном движении  $W$  будем представлять двумя проекциями  $W_l$  и  $W_m$  на прямолинейные направления  $l$  и  $m$ . Направление  $l$  определяется пересечением плоскости  $K$  с плоскостью  $\theta = \text{const}$ , направление  $m$  – пересечением плоскости  $K$  с плоскостью  $z = \text{const}$ . В точке пересечения линий  $l_1$  и  $m_1$

направления  $l$  и  $m$  касаются их и имеют общее начало.

Угол между координатной осью  $z$  и направлением  $l$  обозначим  $\delta_z$ , а угол между окружным направлением  $u$  и направлением  $m$  –  $\delta_u$ , тогда  $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} = -\frac{n_{1u}}{n_{1r}} = \text{tg } \delta_u$  и

$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{n_{1z}}{n_{1r}} = \text{tg } \delta_z, \text{ где } n_1 - \text{нормаль к поверхности } S_{1mid}.$$

Вычислим угол  $\sigma_1$  между направлениями  $l$  и  $m$ . Для этого рассмотрим два единичных вектора  $e_l$  и  $e_m$ , лежащие на этих направлениях. Эти векторы нетрудно

представить проекциями на оси координат:  $e_l = (\sin \delta_z \cos \delta_u \ 0)^T$ ,  $e_m = (\sin \delta_u \ 0 \ \cos \delta_u)^T$ . Запишем скалярное произведение этих векторов:  $e_{lr} e_{mr} + e_{lz} e_{mz} + e_{lu} e_{mu} = |e_l| |e_m| \cos \sigma_1$ , где  $|e_l| = |e_m| = 1$ . Откуда следует, что  $\cos \sigma_1 = \sin \delta_z \sin \delta_u$ , а  $\sigma_1 = \arccos(\sin \delta_z \sin \delta_u)$ .

Установим связь между проекциями скорости потока  $W_z$ ,  $W_r$ ,  $W_u$  на координатные направления и проекциями этой скорости  $W_l$  и  $W_m$ . При этом учтем, что вектор  $W$  и нормаль  $n_1$  – ортогональные векторы и, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, а именно:  $W_r n_{1r} + W_u n_{1u} + W_z n_{1z} = 0$ . Откуда следует:

$$W_r = W_u \operatorname{tg} \delta_u + W_z \operatorname{tg} \delta_z, \quad W_z = W_l \cos \delta_z, \quad W_u = W_m \cos \delta_u. \quad (1)$$

Введем, как предложил сделать Ч.Х. Ву [1], две производные:

$$\frac{\partial_\theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial_z}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad (2)$$

где первая берется вдоль линии  $l_1$  по переменной  $z$  на плоскости  $\theta = \text{const}$ , а следующая – вдоль линии  $m_1$  по переменной  $\theta$  на плоскости  $z = \text{const}$ .

### Вывод уравнения неразрывности

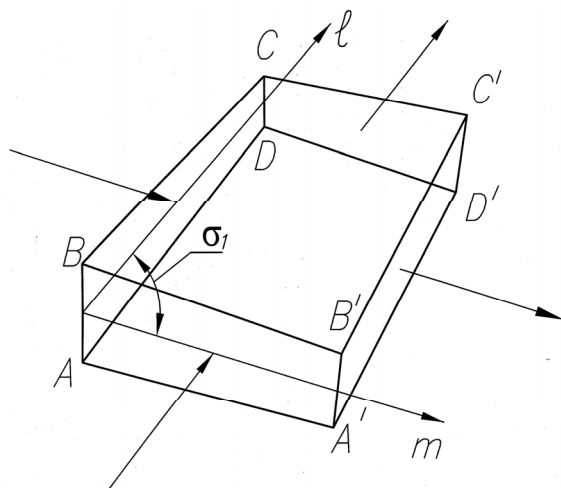


Рис. 3 – К выводу уравнения неразрывности

На поверхности тока  $S_{1mid}$  выберем элемент поверхности  $dS_{1mid}$ , ограниченный линиями пересечения поверхности  $S_{1mid}$  с плоскостями  $\theta = \text{const}$ ,  $\theta + d\theta = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  и  $z + dz = \text{const}$ . В каждой точке элемента  $dS_{1mid}$  проведена нормаль до пересечения с поверхностями тока  $S_1^{(i)}$  и  $S_1^{(i+1)}$ , и получен элементарный объем с нормальной толщиной  $\tau = \tau(r, z, \theta)$ , и весь слой разделен на элементарные объемы.

Рассмотрим элементарный объем, ребра которого обозначим  $AB$ ,  $CD$ ,  $A'B'$  и  $C'D'$  (рис. 3).

Для ребра  $AB$  толщина слоя –  $\tau$ , а радиус элемента  $dS_{1mid}$  –  $r$ . Тогда величины ребер  $CD$  и  $A'B'$  равны  $\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial z} dz$  и  $\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta$ , а величину ребра  $C'D'$  найдем так:

$$\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial_\theta}{\partial z} \left( \tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta \right) = \tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz + \frac{\partial_{\theta z}^2 \tau}{\partial \theta \partial z} d\theta dz.$$

Определим площади граней элементарного объема, через которые проходит поток:

$$\left( \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz \right) \sec \delta_z dz \quad \text{для грани } ABCD; \quad \left( \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta \right) \sec \delta_u r d\theta \quad \text{для грани } ABB'A';$$

$$\left( \tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial_{\theta z}^2 \tau}{\partial \theta \partial z} d\theta dz \right) \left( \sec \delta_z + \frac{\partial_z \sec \delta_z}{\partial \theta} d\theta \right) dz \quad \text{для грани } A'B'C'D';$$

$\left( \tau + \frac{\partial_{\theta} \tau}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial_{z\theta}^2 \tau}{\partial z \partial \theta} dz d\theta \right) \left( \sec \delta_u + \frac{\partial_{\theta} \sec \delta_u}{\partial z} dz \right) \left( r + \frac{\partial_{\theta} r}{\partial z} dz \right) d\theta$  для грани  $CDD'C'$ , и массовые расходы через единицу площади:  $\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1$  для грани  $ABCD$ ;  
 $\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 + \frac{\partial_z}{\partial \theta} \left( \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \right) d\theta$  для  $A'B'C'D'$ ;  $\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1$  для грани  $ABB'A'$  и  
 $\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 + \frac{\partial_{\theta}}{\partial z} \left( \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \right) dz$  для грани  $CDD'C'$ .

Приравняем потоки, входящие в элементарный объем через грани  $ABCD$ ,  $ABB'A'$  и выходящие из него через грани  $A'B'C'D'$ ,  $CDD'C'$ :

$$\begin{aligned} & \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \left( \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial_{\theta} \tau}{\partial z} dz \right) \sec \delta_z dz + \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \left( \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta \right) \sec \delta_u r d\theta = \\ & = \left[ \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 + \frac{\partial_z}{\partial \theta} \left( \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \right) d\theta \right] \times \\ & \times \left( \tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial_{\theta} \tau}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial_{\theta z}^2 \tau}{\partial \theta \partial z} d\theta dz \right) \left( \sec \delta_z + \frac{\partial_z \sec \delta_z}{\partial \theta} d\theta \right) dz + \\ & + \left[ \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 + \frac{\partial_{\theta}}{\partial z} \left( \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \right) dz \right] \times \\ & \times \left( \tau + \frac{\partial_{\theta} \tau}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial_{z\theta}^2 \tau}{\partial z \partial \theta} dz d\theta \right) \left( \sec \delta_u + \frac{\partial_{\theta} \sec \delta_u}{\partial z} dz \right) \left( r + \frac{\partial_{\theta} r}{\partial z} dz \right) d\theta. \end{aligned}$$

Выполним перемножение и исключим слагаемые третьего и более высоких порядков малости. В результате получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[ \tau \sec \delta_z \frac{\partial_z}{\partial \theta} \left( \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \right) + \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \sec \delta_z \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} + \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \tau \frac{\partial_z \sec \delta_z}{\partial \theta} \right] d\theta dz + \\ & + \left[ \tau \sec \delta_u r \frac{\partial_{\theta}}{\partial z} \left( \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \right) + \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \sec \delta_u r \frac{\partial_{\theta} \tau}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \tau r \frac{\partial_{\theta} \sec \delta_u}{\partial z} + \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \tau \sec \delta_u \frac{\partial_{\theta} r}{\partial z} \right] d\theta dz = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial_z}{\partial \theta} \left( \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \tau \sec \delta_z \right) + \frac{\partial_{\theta}}{\partial z} \left( \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \tau r \sec \delta_u \right) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет в левой части только два слагаемых, которые можно представить как разность вторых смешанных производных непрерывной функции (функции тока), введение которой обратит уравнение неразрывности в тождество.

### Система уравнений, описывающая течение на поверхности $S_1$

Уравнение количества движения для трехмерного установившегося относительного движения идеального газа запишем в скалярном виде:

$$W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_u = -v \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (4)$$

$$W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} = -v \frac{\partial p}{\partial z}; \quad (5)$$

$$W_z \frac{\partial W_u}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} + \frac{W_r W_u}{r} + 2\omega W_r = -v \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (6)$$

Для замены частных производных по координатным направлениям  $z$  и  $\theta$  воспользуемся выражениями (2), а проекции скорости потока  $W_z$ ,  $W_r$  и  $W_u$  заменим проекциями  $W_m$  и  $W_l$ , учитывая связи (1). Далее сложим уравнения (4) и (5), предварительно умножив уравнение (4) на  $\operatorname{tg} \delta_z$ , и уравнения (4) и (6), предварительно умножив уравнение (4) на  $\operatorname{tg} \delta_u$ . Полные производные проекций относительной скорости потока по переменной  $z$ , взятые вдоль линии тока определим так:  $\frac{dW_l}{dz} = \frac{\partial_\theta W_l}{\partial z} + \operatorname{ctg} \beta \frac{1}{r} \frac{\partial_z W_l}{\partial \theta}$ ,  $\frac{dW_m}{dz} = \frac{\partial_\theta W_m}{\partial z} + \operatorname{ctg} \beta \frac{1}{r} \frac{\partial_z W_m}{\partial \theta}$ , где  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{W_u}{W_z}$ . Суммы членов уравнений, которые не содержат производные проекций скорости  $W_m$  и  $W_l$ , обозначим  $A_1, A_2, A_3$ :

$$\begin{aligned} A_1 = & W_l W_m \left( \frac{\cos \delta_u}{r} \frac{\partial_z \cos \delta_z}{\partial \theta} + \cos \delta_z \frac{\partial_\theta \cos \delta_u}{\partial z} \right) + \\ & + W_m^2 \frac{\cos \delta_u}{r} \frac{\partial_z \sin \delta_u}{\partial \theta} + W_l^2 \cos \delta_z \frac{\partial_\theta \sin \delta_z}{\partial z} - \frac{(W_m \cos \delta_u)^2}{r} - \omega^2 r + 2\omega W_m \cos \delta_u; \\ A_2 = & W_l \left( W_m \frac{\cos \delta_u}{r} \frac{\partial_z \cos \delta_z}{\partial \theta} + W_l \cos \delta_z \frac{\partial_\theta \cos \delta_z}{\partial z} \right); \\ A_3 = & W_l \left( W_m \frac{\cos \delta_u}{r} \frac{\partial_z \cos \delta_u}{\partial \theta} + W_l \cos \delta_z \frac{\partial_\theta \cos \delta_u}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{W_m W_l \cos \delta_u \sin \delta_z + W_m^2 \cos \delta_u \sin \delta_u}{r} + 2\omega (W_l \sin \delta_z + W_m \sin \delta_u). \end{aligned}$$

В результате трехмерное течение отнесено к срединной поверхности  $S_{1mid}$ , и уравнение количества движения представлено двумя проекциями, а именно:

$$\begin{aligned} & W_l \cos \delta_z \frac{dW_l}{dz} (\cos \delta_z + \sin \delta_z \operatorname{tg} \delta_z) + \\ & + W_l \cos \delta_z \frac{dW_m}{dz} \sin \delta_u \operatorname{tg} \delta_z + A_1 \operatorname{tg} \delta_z + A_2 = -v \frac{\partial_\theta p}{\partial z}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & W_l \cos \delta_z \frac{dW_l}{dz} \sin \delta_z \operatorname{tg} \delta_u + \\ & + W_l \cos \delta_z \frac{dW_m}{dz} (\cos \delta_u + \sin \delta_u \operatorname{tg} \delta_u) + A_1 \operatorname{tg} \delta_u + A_3 = -v \frac{1}{r} \frac{\partial_z p}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для того, чтобы получить систему уравнений, описывающую течение через подвижную решетку на скрученной произвольным образом поверхности  $S_1$ , систему уравнений (7, 8) следует дополнить уравнением неразрывности (3), а так же уравнением сохранения энергии в относительном движении и уравнением изоэнтропийного процесса, записанными вдоль линии тока.

### Выводы

Вектор скорости потока задается проекциями на два не ортогональных прямолинейных направления, которые – касательные к линиям пересечения произвольно скрученной поверхности тока  $S_1$  с плоскостями  $\theta = \text{const}$  и  $z = \text{const}$ .

Угол между направлениями, на которые проектируется вектор скорости потока, однозначно определяется на основе геометрических характеристик поверхности  $S_1$ .

Для постановки прямой и обратной задач теории решеток достаточно задать граничные условия в виде, предложенном в [4, 5], а методы решения прямой и обратной задач на поверхности вращения без принципиальных изменений будут эффективными и для задач на произвольно скрученной поверхности  $S_1$ .

Результаты исследования, приведенные в статье, – мотив для разработки на поверхности  $S_2$  новых, без осевой симметрии, прямой и обратной задач. Цель – обратная задача, которая сначала определит меридиональные очертания заданной средней поверхности  $S_2$  межлопаточного канала, а потом – всю его геометрию (обратные задачи на поверхностях  $S_1$ ), включая геометрию активной части лопаток.

**Список литературы:** 1. Wu, C.-H. A General theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial –, radial –, and mixed – flow types [Text] / C.-H. Wu // NACA Tech. – 1952. – Note 2604. – 93 p. 2. Дорфман, Л.А. Ускорение оптимизационных расчетов проточных частей паровых турбин [Текст] / Л.А. Дорфман, Г.И. Архипцев // Энергомашиностроение. – 1986. – № 11. – С. 19-21. 3. Жуковский, М.И. Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашинах [Текст] / М.И. Жуковский. – Л.: Машиностроение, 1967. – 288 с. 4. Субботович, В.П. Обтекание трехмерным потоком решетки профилей турбомашины на поверхности вращения [Текст] / В.П. Субботович, А.Ю. Юдин, Ф.К. Там // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – № 6. – С. 41-46. 5. Субботович, В.П. Обратная задача теории решеток на осесимметричной поверхности тока [Текст] / В.П. Субботович, А.Ю. Юдин, Ф.К. Там // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ», 2009. – № 3. – С. 56-61. – ISSN 2078-774X. 6. Chima, R.V. Comparison of Two- and Three-Dimensional Flow Computations With Laser Anemometer Measurements in a Transonic Compressor Rotor [Text] / R.V. Chima, A.J. Strazisar // Trans. ASME: J. Eng. Power. – 1983. – 105, № 3. – P.596–605. 7. Miller, D.P. The relative merits of an inviscid Euler 3D and quasi-3D analysis for the design of transonic rotors [Text] / D.P. Miller, A.C. Bryans // ASME Pap. – 1988. – GT 69. – P. 1-13.

Поступила в редколлегию 15.02.13

УДК 621.165

**Поток через вращающуюся решетку осевой турбомашины на произвольной поверхности  $S_1$**  [Текст] / В.П. Субботович // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 14(988). – С. 43-48. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-774X.

Розглянута відносна стала течія ідеального газу крізь робочу решітку осевої турбомашини. Потік розділений на шари поверхнями течії  $S_1$ , у яких немає вісі симетрії. Тривимірний потік зведений до двовимірної без припущення про те, що радіальна складова швидкості і всі похідні в радіальному напрямі зберігають свої величини, які відповідають розв'язку вісесиметричної задачі на поверхні течії  $S_2$ .

**Ключові слова:** проточна частина турбомашини, квазітривимірний потік, робоча решітка, рівняння нерозривності, рівняння кількості руху.

In the inter-blade channel of the rotor cascade of axial turbomachine the relative state flow of ideal gas was examined. The flow was separated on layers by the stream-surfaces  $S_1$ . Stream-surfaces do not have the axis of symmetry. The 3D-flow was reduced to 2D-flow without assumption that radial component of velocity and all derivatives in radial direction save the values from axial-symmetric decision on the stream-surface  $S_2$ .

**Keywords:** flowing pass of turbomachine, quasi-three-dimensional flow, rotor cascade, equation of continuity, momentum equation.